Άσκηση: Έστω A, B δύο σύνολα:
Ν.δ.ο. τα εξής:

(i) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

(ii) $A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

(iii) $A \neq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$

Απόδειξη: Το (iii) είναι άμεση συνέπεια από το (ii)

(i) $\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι $A \subseteq B$ κ' ν.δ.ο. $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
Έστω $X \in \mathcal{P}(A)$, τότε $X \subseteq A$ κ' επειδή $A \subseteq B$ προκύπτει $X \subseteq B$, δηλαδή $X \in \mathcal{P}(B)$. Συνεπώς, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ ν.δ.ο. $A \subseteq B$

1ος τρόπος: Έχουμε ότι $A \subseteq A$, δηλαδή $A \in \mathcal{P}(A)$, άρα $A \in \mathcal{P}(B)$, δηλαδή $A \subseteq B$

2ος τρόπος: Έστω $x \in A$, τότε $\{x\} \subseteq A$, δηλαδή $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$, άρα (αφού $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$) έχουμε $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$, δηλαδή $\{x\} \subseteq B$, άρα $x \in B$. Άρα $A \subseteq B$

(ii) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \underset{\text{Ερώτημα (i)}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \wedge \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

Να βρεθεί το σύνολο

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$$

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\delta\}, \{\alpha,\beta\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\alpha,\delta\}, \{\beta,\gamma\}, \{\beta,\delta\}, \{\gamma,\delta\}, \{\alpha,\beta,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\delta\}, \{\alpha,\gamma,\delta\}, \{\beta,\gamma,\delta\}, \{\alpha,\beta,\delta\}\}$

$\{\delta\} = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\{\alpha, \beta\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$$= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\},$$
$$\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}\},$$
$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$$
$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

<u>Άσκηση</u>

(i) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A \subseteq \cup \mathcal{B}$

(ii) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \cap \mathcal{B} \subseteq A$

(iii) $\emptyset \in \mathcal{B} \Rightarrow \cap \mathcal{B} = \emptyset$

(iv) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\cup \mathcal{B})$

<u>Απόδειξη:</u> (i) Υποθέτουμε ότι $A \in \mathcal{B}$. $\forall x \in A$ $\exists$ σύνολο της $\mathcal{B}$ (το ίδιο το A) που περιέχει το x, άρα $x \in \cup \mathcal{B}$. Άρα $A \subseteq \cup \mathcal{B}$

(ii) Υποθέτουμε $A \in \mathcal{B}$. Αν $x \in \cap \mathcal{B}$, τότε το $x \in$ σε κάθε σύνολο που $\in \mathcal{B}$, άρα (άρα $A \in \mathcal{B}$) και έχουμε $x \in A$. Άρα $\cap \mathcal{B} \subseteq A$.

(iii) Αν $\emptyset \in \mathcal{B}$, τότε από το (ii) προκύπτει $\cap \mathcal{B} \subseteq \emptyset$, άρα $\cap \mathcal{B} = \emptyset$.

(iv) Αν $x \in \mathcal{B}$, τότε από το (i) και έχουμε $x \subseteq \cup \mathcal{B}$, άρα $x \in \mathcal{P}(\cup \mathcal{B})$. Άρα $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\cup \mathcal{B})$

<u>Άσκηση:</u>

Έστω A, B δύο σύνολα. Νδο:

(i) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

(ii) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \Leftrightarrow A \subseteq B$ ή $B \subseteq A$

(iii) $\mathcal{P}(A - B) \subseteq (\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$

Απόδειξη: (i) $X \in P(A) \cup P(B)$

$\Rightarrow X \in P(A)$ ή $X \in P(B)$

$\Rightarrow X \subseteq A$ ή $X \subseteq B$

$\Rightarrow X \subseteq A \cup B$

$\Rightarrow X \in P(A \cup B)$

(ii) $\Leftarrow$) Αν $A \subseteq B$, τότε $A \cup B = B$ κ' (όπως είδαμε νωρίτερα) $P(A) \subseteq P(B)$.
Άρα $P(A) \cup P(B) = P(B) = P(A \cup B)$

Ομοίως αν $B \subseteq A$

$\Rightarrow$ Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ κ' θέλουμε να δδ. $A \subseteq B$ ή $B \subseteq A$.

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα, δηλαδή ότι $A \nsubseteq B$ κ' $B \nsubseteq A$. Τότε $\exists x \in A$ με $x \notin B$ κ' $\exists y \in B$ με $y \notin A$. Τότε $x, y \in A \cup B$, άρα $\{x, y\} \in P(A \cup B)$, άρα $\{x, y\} \in P(A) \cup P(B)$, δηλαδή $\{x, y\} \in P(A)$ ή $\{x, y\} \in P(B)$, δηλαδή $\underbrace{\{x, y\} \subseteq A}_{\text{άτοπο, διότι } y \notin A}$ ή $\underbrace{\{x, y\} \subseteq B}_{\text{άτοπο, διότι } x \notin B}$

Επομένως $A \subseteq B$ ή $B \subseteq A$

Σχέσεις: Σχέση είναι μια "διαδικασία" που μας επιτρέπει να συσχετίσουμε τα στοιχεία δύο διαφορετικών συνόλων (ή κ' του ίδιου συνόλου)

Αν π.χ. $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ είναι ένα σύνολο τεσσάρων φοιτητών
$B = \{x, y, z, w\}$ είναι το σύνολο των τεσσάρων μαθημάτων του πρώτου εξαμήνου.
ώστε:

ο α έχει περάσει τα μαθήματα x, y

ο β έχει περάσει το μάθημα y

ο γ έχει περάσει τα μαθήματα x, y, z

ο ό δεν πέρασε κανένα μάθημα

Έτσι σχετίζουμε τα στοιχεία του συνόλου A με τα στοιχεία του συνόλου B.
Αντί για την παραπάνω περιγραφή μπορούμε να γράψουμε:

σύνολο
$\sigma = \{(\alpha, x), (\alpha, y), (\beta, y), (\gamma, x), (\gamma, y), (\gamma, z)\}$

όπου το πρώτο στοιχείο κάθε διατεταγμένου ζεύγους αντιστοιχεί στο φοιτητή κ' το δεύτερο το μάθημα που πέρασε. Το σ είναι υποσύνολο του $A \times B$

Ορισμός: Σχέση σ από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B είναι ένα υποσύνολο του $A \times B$. $[\sigma \subseteq A \times B]$

Πολλές φορές το σύνολο σ των διατεταγμένων ζευγών λέγεται "γράφημα της σ"

Συμβολισμός: Αν σ είναι μια σχέση κ' $(x, y) \in \sigma$ λέμε ότι "το x συσχετίζεται με το y μέσω της σ" κ' συμβολίζουμε $x \sigma y$.
Δηλαδή $(x, y) \in \sigma \iff x \sigma y$

Επίσης αντί του συμβολισμού $(x, y) \notin \sigma$ μπορούμε να γράψουμε $x \not\sigma y$

Έστω $\sigma \subseteq A \times B$ μια σχέση
ονομάζουμε π.ο. της Σ κ' συμβολίζουμε $D(\sigma)$
$D(\sigma) = \{x \in A \ \exists y \in B \ x \sigma y\}$
Ονομάζουμε πεδίο τιμών της σ κ' συμβολίζουμε $R(\sigma)$
$R(\sigma) = \{y \in B \ \exists x \in A \ (x, y) \in \sigma\}$

Έτσι το π.ο. της σ είναι το σύνολο των στοιχείων του A πρώτα μέλη διατεταγμένων ζευγών που ανήκουν στη σ.
Το π.τ. της σ είναι το σύνολο των στοιχείων του B που αποτελούν δεύτερα μέλη δ.ζ. που ανήκουν στη σ.

Στο προηγούμενο π.χ.

$D(\sigma) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

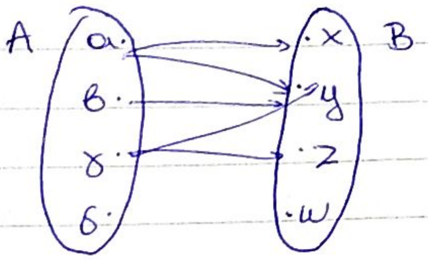
$R(\sigma) = \{x, y, z\}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $x \notin D(\sigma) \iff \forall y \in B \ \ x \not\sigma y$

$y \in R(\sigma) \iff \forall x \in A \ \ x \not\sigma y$

Μία σχέση $\sigma \subseteq A \times B$ συμβολίζεται κ' με το σύμβολο $\sigma :$ ~~$A \to B$~~

Πολλές φορές μία σχέση σ παριστάνεται με ένα βελοειδές διάγραμμα με ένα βέλος ∀ ζεύγος της σ που ξεκινά από το πρώτο κ' καταλήγει στο δεύτερο στοιχείο.



Αντιστροφή μίας σχέσης

Αν $\sigma \subseteq A \times B$ είναι μία σχέση.

αντιστρέφοντας τη σειρά των διατεταγμένων ζευγών της σ προκύπτει μία νέα σχέση την οποία συμβολίζουμε σ^{-1} για την οποία $\sigma^{-1} \subseteq B \times A$.

Η σ^{-1} ονομάζεται αντίστροφη της σ.

$\sigma^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \sigma\}$

Στο προηγούμενο π.χ.

$\sigma^{-1} = \{(x,\alpha), (y,\alpha), (y,\beta), (x,\gamma), (y,\gamma), (z,\gamma)\}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

(i) $D(\sigma^{-1}) = R(\sigma)$

$R(\sigma^{-1}) = D(\sigma)$

(ii) $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$